★
## Exercice 1 — Voir correction

À l'aide d'une table de vérité, démontrer que $A \Rightarrow B$ et $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ ont les même valeurs de vérité.

★
## Exercice 2 — Voir correction

À l'aide d'une table de vérité, démontrer que $\neg(A \vee B)$ et $(\neg A) \wedge (\neg B)$ ont les même valeurs de vérité.

★
## Exercice 3 — Voir correction

Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes et leur négation :

1) $f$ est croissante sur $[a, b]$.
2) $f$ est majorée sur $[a, b]$.
3) La suite $(u_n)$ est bornée.
4) La suite $(u_n)$ tend vers $+\infty$.
5) $p$ est un nombre premier (avec $p \in \mathbb{N}$).
6) $m$ a la même parité que $n$.
7) Il existe un entier que l'on peut écrire comme somme de deux carrés.
8) 7 est le plus petit entier qu'on ne peut pas écrire comme la somme de trois carrés.

★
## Exercice 4 — Voir correction

Pour chacune des propositions suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse, puis exprimer leur négation.

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq x$
2) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq x$
3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq x$
4) $\exists x \in ]0, +\infty[, x > 0, \forall y \in ]0, +\infty[, x < y$
5) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^2 = y) \wedge (y^2 = -x)$
6) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, 0 < x_0 < \varepsilon$
7) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, (2k = n) \vee (2k + 1 = n)$

★
## Exercice 5 — Voir correction

Pour chacune des implications suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse, exprimer sa réciproque et dire si elle est vraie ou fausse.

1) Si $ABC$ est un triangle rectangle, alors la somme de ses angles (en radians) est égale à $\pi$.
2) Si $ABC$ est un triangle, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
3) Si $x > 0$, alors $-x + 1 < 0$
4) Si $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.
5) Si $f$ est une fonction croissante sur $[a, b]$, alors $f(a) < f(b)$
6) Si $f$ est une fonction monotone sur $[a, b]$, alors

$$\forall c \in ]a, b[, \quad (f(c) - f(a)) \times (f(b) - f(c)) \geq 0$$

★
## Exercice 6 — Voir correction

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \iff a = c$ et $b = d$.

★
## Exercice 7 — Voir correction

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $|4 - x| \leq 1$
2) $\sqrt{(x-2)^2} > 1$
3) $|x - 3| + |x + 4| \leq 1$

⋆
## Exercice 8 — Voir correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ alors $\dfrac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

⋆
## Exercice 9 — Voir correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n(n^2+5)$ est divisible par 3.

⋆
## Exercice 10 — Voir correction

Résoudre par analyse synthèse l'équation $\sqrt{4x+5} = x$

⋆
## Exercice 11 — Voir correction

Montrer par analyse-synthèse que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

⋆
## Exercice 12 — Voir correction

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations d'inconnue $x$ suivantes :

a) $|x^2 - 100| \geq 96$

b) $|x-1| \geq |x+2|$

c) $|x-5| + |6-2x| \geq 4$

⋆
## Exercice 13 — Voir correction

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\forall \varepsilon > 0, x < y + \varepsilon$, alors $x \leq y$.

⋆ ⋆
## Exercice 14 — Voir correction

Soit $n$ un entier non nul et soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille de $n$ réels appartenant à $[0, \pi]$.
Montrer que si $\sin(x_1) + \sin(x_2) + \cdots + \sin(x_n) \geq \dfrac{n\sqrt{3}}{2}$, alors il existe $i \in \mathbb{N}, 1 \leqslant i \leqslant n$, $x_i \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$

⋆
## Exercice 15 — Voir correction

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses (démonstration requise), et écrire leurs négations :

a) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}],\ \dfrac{1}{x^2} \geq n$

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists q \in \mathbb{Q},\ q^2 = x$

c) $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists k \in \{-2; 2\},\ y = \dfrac{kn}{2}$

d) $(\forall a \in \mathbb{R},\ a^n = a^m) \iff (m = n)$ (où $m$ et $n$ sont deux entiers)

e) $(\forall x \in \mathbb{R}, (ax)^2 = (bx)^2) \iff (a = b)$ (où $a$ et $b$ sont deux réels)

⋆
## Exercice 16 — Voir correction

Si $a$ et $b$ sont deux réels, on note $\max(a,b)$ (respectivement $\min(a,b)$) le plus grand élément entre $a$ et $b$ (respectivement le plus petit), autrement dit $\max(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } b \leqslant a \\ b & \text{si } a < b \end{cases}$ (respectivement $\min(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leqslant b \\ b & \text{si } b < a \end{cases}$

Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ et $\min(a,b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$.

⋆
## Exercice 17 — Voir correction

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\sqrt{x^3+x^2-x} = \sqrt{2x-4x^2-x^3}$ et $\sqrt{x-2x^3} = \sqrt{5x^2-2x}$

⋆ ⋆
## Exercice 18 — Voir correction

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.

## Correction des exercice

**Correction de l'exercice 1 :** D'après le cours :

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

On a donc

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V |
| V | F | F | V | F |
| F | V | V | F | V |
| F | F | V | V | V |

donc $A \Rightarrow B$ et $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ ont la même table de vérité.

**Correction de l'exercice 2 :** On a d'une part

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $\neg(A \vee B)$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | F |
| V | F | V | F |
| F | V | V | F |
| F | F | F | V |

et d'autre part

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $(\neg A) \wedge (\neg B)$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | F |
| V | F | F | V | F |
| F | V | V | F | F |
| F | F | V | V | V |

**Correction de l'exercice 3 :**

1) « $f$ est croissante sur $[a;b]$ » s'écrit :

$$\boxed{\forall x \in [a,b], \forall y \in [a,b], (x < y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))}$$

« $f$ n'est pas croissante sur $[a;b]$ » s'écrit :

$$\boxed{\exists x \in [a,b], \exists y \in [a,b], (x < y) \wedge (f(x) > f(y))}$$

2) $f$ est majorée s'il existe un réel $M$ tel que $f(x) \leq M$ quel que soit $x \in [a,b]$.
« $f$ est majorée sur $[a:b]$ » s'écrit :

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [a,b], f(x) \leq M}$$

« $f$ n'est pas majorée sur $[a;b]$ » s'écrit :

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in [a,b], f(x) > M}$$

3) La suite $(u_n)$ est bornée s'il existe deux réels $m$ et $N$ tels que $m \leq u_n \leq M$ quel que soit $n$.
« $(u_n)$ est bornée » s'écrit donc :

$$\boxed{\exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M}$$

Pour nier la proposition « $m \leq u_n \leq M$ » il faut remarquer que celle ci peut s'écrire à l'aide du connecteur ET : « $m \leq u_n$ ET $u_n \leq M$ ». Sa négation est donc « $m > u_n$ OU $u_n > M$ » « $(u_n)$ n'est pas bornée » s'écrit :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, m > u_n \quad \text{ou} \quad u_n > M}$$

4) $(u_n)$ tend vers $+\infty$ si pour tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.
« $(u_n)$ tend vers $+\infty$ » s'écrit donc :

$$\boxed{\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > A}$$

« $(u_n)$ ne tend pas vers $+\infty$ » s'écrit :

$$\boxed{\exists A > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, u_n \leq A}$$

**Remarque :** le quantificateur « $\forall n \geq n_0$ » signifie « $\forall n \in [\![ n_0; +\infty [\![$ ». Sa négation est donc bien « $\exists n \in [\![ n_0; +\infty [\![$ » (qu'on écrit simplement « $\exists n \geq n_0$ ») et non pas « $\exists n < n_0$ ».

5) **Rappel :** Si $n, p \in \mathbb{N}$, on dit que $n$ divise $p$ s'il existe un entier $k$ tel que $p = nk$
$p$ est un nombre premier si ses seuls diviseurs entiers sont 1 et $p$.
« $p$ est un nombre premier » peut donc s'écrire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, p\}, \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1, p\}, p \neq nk}$$

ou encore :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}, (p = nk) \Rightarrow n \in \{1, p\}}$$

« $p$ n'est pas un nombre premier » peut s'écrire :

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{1, p\}, \exists k \in \mathbb{N} \setminus \{1, p\}, p = nk}$$

ou encore :

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N}, p = nk \quad \text{et} \quad n \notin \{1, p\}}$$

car la négation de $A \Rightarrow B$ est $A \wedge \neg B$.

6) $n$ et $m$ ont même parité s'ils sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs.
$n$ est pair s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$, et impair s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
« $n$ et $m$ ont la même parité » s'écrit donc

$$\boxed{(\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k) \Leftrightarrow (\exists k' \in \mathbb{N}, m = 2k')}$$

La négation d'une équivalence est difficile à écrire : $A \Leftrightarrow B$ est équivalent à $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ et la négation de $A \Rightarrow B$ est $A \quad \text{et} \quad nonB$. Ainsi la négation de $(A \iff B)$ est $(A \quad \text{et} \quad \text{non } B) \quad \text{ou} \quad (B \quad \text{et} \quad \text{non } A)$.
La négation de « $n$ est pair » est « $n$ est impair », il est donc plus simple d'écrire « $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k + 1$ » pour nier « $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$ ».
« $n$ est $m$ n'ont pas la même parité » s'écrit :

$$\boxed{\big((\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k) \quad \text{et} \quad (\exists k' \in \mathbb{N}, m = 2k' + 1)\big) \quad \text{ou} \quad \big((\exists k' \in \mathbb{N}, m = 2k') \quad \text{et} \quad (\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k + 1)\big)}$$

7) « Il existe un entier que l'on peut écrire comme somme de deux carrés » s'écrit :

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n = m^2 + p'^2}$$

Sa négation s'écrit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \neq m^2 + p^2}$$

8) « $n$ peut s'écrire comme somme de trois carrés » s'écrit :

$$\exists k_1 \in \mathbb{N}, \exists k_2 \in \mathbb{N}, \exists k_3 \in \mathbb{N}, n = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$$

donc « $n$ ne peut pas s'écrire comme somme de trois carrés » se traduit par

$$\forall k_1 \in \mathbb{N}, \forall k_2 \in \mathbb{N}, \forall k_3 \in \mathbb{N}, n \neq k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$$

Ainsi, la proposition « 7 est le plus petit entier qu'on ne peut pas écrire comme la somme de trois carrés » peut s'écrire :

$$\boxed{\underbrace{(\forall k_1 \in \mathbb{N}, \forall k_2 \in \mathbb{N}, \forall k_3 \in \mathbb{N}, 7 \neq k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)}_{\text{7 n'est pas somme de trois carrés}} \wedge \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}, ((\forall k_1 \in \mathbb{N}, \forall k_2 \in \mathbb{N}, \forall k_3 \in \mathbb{N}, n \neq k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \Rightarrow (n \geq 7))}_{\text{Si un entier } n \text{ n'est pas somme de trois carrés, alors il est plus grand que 7}}}$$

Sa négation s'écrit donc :

$$\boxed{\underbrace{(\exists k_1 \in \mathbb{N}, \exists k_2 \in \mathbb{N}, \exists k_3 \in \mathbb{N}, 7 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)}_{\text{7 est la somme de trois carrés}} \vee \underbrace{\exists n \in \mathbb{N}, ((\forall k_1 \in \mathbb{N}, \forall k_2 \in \mathbb{N}, \forall k_3 \in \mathbb{N}, n \neq k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \Rightarrow (n < 7))}_{\text{Il existe un } n \text{ inférieur à 7 qui n'est pas somme de trois carrés}}}$$

**Correction de l'exercice 4 :**

1) Vrai, si $x$ est un réel quelconque, en arrondissant $x$ à l'entier supérieur on obtient un entier $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq x$.
La négation est

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n < x}$$

2) Vrai, par exemple $x = 2$ et $n = 2$, on a bien $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ et $n \geq x$.
La négation est

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq x}$$

3) Faux, en effet sa négation est

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n < x}$$

et cette proposition est vraie, en prenant par exemple $x = 4$ et $n = 3$.

4) Faux : soit $x \in ]0, +\infty[$, alors en prenant $y = \dfrac{x}{2}$ on a $y \leq x$ donc la proposition "$\forall y \in ]0, +\infty[,\ x < y$" est fausse.
La négation de cette proposition est

$$\boxed{\forall x \in ]0, +\infty[, \exists y \in ]0, +\infty[, y \leq x}$$

5) Vrai, on peut prendre $x = -1$ et $y = 1$, on a alors bien $x^2 = y = 1$ et $y^2 = 1 = -x$.
La négation est

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x^2 \neq y) \vee (y^2 \neq -x)}$$

6) Vrai, pour un $\varepsilon > 0$ quelconque on peut poser $x = \dfrac{\varepsilon}{2}$. On a alors bien $0 < x < \varepsilon$.
La négation de cette proposition est

$$\boxed{\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}, x_0 \notin ]0, \varepsilon[}$$

7) Vrai, un entier naturel est soit pair soir impair.
Si $n$ est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = 2k$
Si $n$ est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = 2k + 1$,
dans tous les cas, $(x = 2k) \vee (x = 2k + 1)$ est vraie.
La négation est

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, (2k \neq n) \wedge (2k + 1 \neq n)}$$

**Correction de l'exercice 5 :**

1) Cette implication est vraie ($\pi$ radians $= 180^o$ et la propriété sur la somme des angles est vraie pour tous les triangles, donc elle est vraie pour les triangles rectangles)
La réciproque est
"Si la somme des angles d'un triangle fait $\pi$ radians, alors ce triangle est rectangle".
Cette implication est fausse puisqu'un triangle quelconque a toujours la somme de ses angles égale à $\pi$.

2) Cette implication est fausse car si $ABC$ est un triangle non rectangle, alors $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ selon la réciproque du théorème de Pythagore.
La réciproque est "Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors $ABC$ est un triangle"
Elle est fausse aussi, si $A$, $B$ et $C$ sont trois points confondus, alors on a $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 0$ mais $ABC$ n'est pas un triangle.

3) Cette implication est fausse, par exemple $x = \dfrac{1}{2}$ vérifie bien $x > 0$ mais $-\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2} > 0$.
La réciproque est "Si $-x + 1 < 0$, alors $x > 0$". La réciproque est vraie car si $-x + 1 < 0$, alors $-x < -1 < 0$ donc $x > 0$.

4) Cette implication est vraie. En effet, si $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, alors $a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2$, donc $2ab = 0$ ce qui implique que $a = 0$ ou $b = 0$.
La réciproque est "Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $(a + b)^2 = a^2 + b^2$". La réciproque est vraie aussi selon le même calcul.

5) Cette implication est fausse, $f$ peut être constante (une fonction constante est à la fois croissante et décroissante).
La réciproque est "Si $f(a) < f(b)$, alors $f$ est croissante sur $[a; b]$".
Cette réciproque est fausse, par exemple $(-1)^2 < 3^2$ mais la fonction carré n'est pas croissante sur $[-1, 3]$.

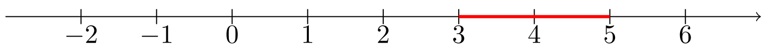
6) Cette implication est vraie. En effet, si $f$ est monotone sur $[a,b]$, alors pour tout $c \in ]a,b[$ on a soit $f(a) \leq f(c) \leq f(b)$, soit $f(a) \geq f(c) \geq f(b)$.
Dans tous les cas, $f(c)-f(a)$ et $f(b)-f(c)$ sont de même signe, donc leur produit est positif.
La réciproque est "Si $\forall c \in ]a,b[,\ (f(c)-f(a)) \times (f(b)-f(c)) \geq 0$, alors $f$ est monotone sur $[a,b]$".
Cette réciproque est fausse,

**Correction de l'exercice 6 :** Le sens $a=c$ et $b=d \Longrightarrow a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$ est évident.
Réciproquement, supposons que $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$ **(1)** et montrons que $a=c$ et $b=d$.
On déduit de notre hypothèse que $a-c=(d-b)\sqrt{2}$ **(2)**.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $d \neq b$, alors $d-b \neq 0$ donc on déduit de **(2)** que $\sqrt{2}=\dfrac{a-c}{d-b}$. Or $a-c \in \mathbb{Z}$ et $d-b \in \mathbb{Z}$ donc cette égalité contredit le fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On en déduit donc que $d=b$.
On peut simplifier par $b\sqrt{2}$ dans **(1)** et on obtient $a=c$.

$\boxed{\text{Finalement on a bien } a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2} \Longleftrightarrow a=c \text{ et } b=d}$

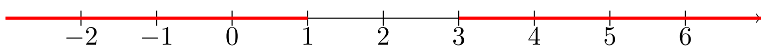
**Correction de l'exercice 7 :**

1) $|4-x| \leq 1$ si et seulement si la distance entre $x$ et 4 est inférieure ou égale à 1.




Ainsi, $\boxed{S=[3;5]}$.

2) $\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$, donc $\sqrt{(x-2)^2} \geq 1 \Longleftrightarrow |x-2| \geq 1$ si et seulement si la distance entre $x$ et 2 est strictement supérieure à 1.




Ainsi, $\boxed{S=]-\infty;1[\cup]3;+\infty[}$.

3) $|x-3|$ est la distance entre $x$ et 3.
$|x+4|=|x-(-4)|$ est la distance entre $x$ et $-4$.
La distance entre $x$ et 3 ajoutée à la distance entre $x$ et $-4$ ne peut pas être inférieure à 1, donc $S=\varnothing$.

**Correction de l'exercice 8 :** Soit $n$ est pair, soit il est impair
Si $n$ est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n=2k$.
Ainsi, $n(n+1)=2k(2k+1)$ est pair, donc $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.
Si $n$ est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n=2k+1$. ainsi, $n(n+1)=(2k+1)(2k+2)=2(2k+1)(k+1)$ est pair, donc $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.
Dans tous les cas, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est bien un entier.

**Correction de l'exercice 9 :** On raisonne par disjonction de cas sur le reste de la division de $n$ par 3 : soit $n=3k$ avec $k \in \mathbb{N}$, soit $n=3k+1$, soit $n=3k+2$.
Si $n=3k$, alors $n(n^2+5)=3k(9k^2+5)$ est un multiple de 3.
Si $n=3k+1$, alors $n(n^2+5)=(3k+1)(9k^2+6k+1+5)=3(3k+1)(3k^2+2k+2)$ est un multiple de 3
Si $n=3k+2$, alors $n(n^2+5)=(3k+2)(9k^2+12k+4+5)=3(3k+2)(3k^2+4k+3)$ est un multiple de 3.
Dans tous les cas, $n(n^2+5)$ est un multiple de 3.

**Correction de l'exercice 10 :** **Analyse :** Supposons que $x \in \mathbb{R}$ est une solution de $\sqrt{4x+5}=x$. Alors, en élevant au carré on obtient $4x+5=x^2$ donc $x^2-4x-5=0$
Le discriminant de cette équation est $\Delta=16+20=36$, donc les solutions de cette équation de degré 2 sont $x_1=\dfrac{4-6}{2}=-1$ et $x_2=\dfrac{4+6}{2}=5$.
Si $x$ est solution, alors $x=-1$ ou $x=5$.
**Synthèse :** Réciproquement, si $x=-1$, alors $4x+5=1$ donc $\sqrt{4x+5}=1$, mais $1 \neq -1$ donc $-1$ n'est pas solution !
Si $x=5$, on a $\sqrt{4x+5}=\sqrt{25}=5=x$ donc 5 est bien solution. Finalement $S=\{5\}$.

**Correction de l'exercice 11 :** Analyse : Supposons qu'il existe une fonction paire $P$ et une fonction impaire $I$ telles que $f=I+P$.
Alors, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=I(x)+P(x)$ et $f(-x)=I(-x)+P(-x)=P(x)-I(x)$ car $P$ est paire et $I$ est impaire.
Ainsi, en sommant ces égalités on obtient

$$f(x)+f(-x)=2P(x)f(x)-f(-x) \qquad\qquad =2I(x)$$

donc nécessairement

$$P(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad I(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Synthèse Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction. Posons

$$\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad \forall x\in\mathbb{R},\ I(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

alors $\forall x\in\mathbb{R}, P(-x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=P(x)$ et $I(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=-\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=-I(x)$ donc $P$ est paire et $I$ est impaire.
Enfin,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)+I(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=2\frac{f(x)}{2}=f(x)$$

donc les fonctions $P$ et $I$ répondent au problème posé.

**Correction de l'exercice 13 :** Montrons que si $x>y$, alors $\exists\varepsilon>0,\ x>y+\varepsilon$.
Soit $x,y\in\mathbb{R}$ avec $x>y$. Soit $\varepsilon=\dfrac{x-y}{2}$. Alors $y+\varepsilon=y+\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{x+y}{2}<\dfrac{x+x}{2}=x$.
Par contraposée, on en conclut que si $\forall\varepsilon>0, x>y+\varepsilon$, alors $x\leq y$.

**Correction de l'exercice 14 :** Supposons que pour tout $i\in\mathbb{N}, 1\leq i\leq n$, $x_i\notin\left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$. Alors, $\forall i\in\mathbb{N}, 1\leq i\leq n$ $x_i\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{2\pi}{3};\pi\right]$, donc $\forall i\in\mathbb{N}, 1\leq i\leq n$, $\sin(x_i)<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc par somme $\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i)<n\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Par contraposée, on en déduit que si $\sin(x_1)+\sin(x_2)+\cdots+\sin(x_n)\geq\dfrac{n\sqrt{3}}{2}$, alors il existe $i\in\mathbb{N}, 1\leqslant i\leqslant n$, $x_i\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$

**Correction de l'exercice 15 :**

a) Si $-\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{1}{2}$, alors $0\leq|x|\leq\dfrac{1}{2}$ donc $0\leq x^2\leq\dfrac{1}{4}$.
On en déduit que si $-\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{1}{2}$ alors $\dfrac{1}{x^2}\geq\dfrac{1}{1/4}\geq 4$. Pour $n=4$, on a $\forall x\in[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}],\ \dfrac{1}{x^2}\geq n$ donc la proposition est vraie.
Sa négation est

$$\forall n\in\mathbb{N},\exists x\in[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}],\ \frac{1}{x^2}<n$$

b) Cette proposition est FAUSSE car sa négation est vraie.
Sa négation est

$$\exists x\in\mathbb{R},\forall q\in\mathbb{Q}, q^2\neq x$$

En effet, d'après le cours, pour $x=2$ il n'existe aucun nombre rationnel $q>0$ tel que $q^2=x$, c'est à dire tel que $q=\sqrt{2}$.

c) Soit $y\in\mathbb{Z}$. Si $y\geq 0$, on pose $n=y$ et $k=2$ et on a alors $\dfrac{kn}{2}=\dfrac{2y}{2}=y$ avec $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\{-2;2\}$.
Si $y<0$, on pose $n=-y$ et $k=-2$ et on a alors $\dfrac{kn}{2}=\dfrac{-2\times(-y)}{2}=y$ avec $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\{-2;2\}$.
La proposition est donc vraie.
Sa négation est

$$\exists y\in\mathbb{Z},\forall n\in\mathbb{N},\forall k\in\{-2;2\},\ y\neq\frac{kn}{2}$$

d) Supposons que $\forall a\in\mathbb{R}, a^n=a^m$. Alors en particulier pour $a=2$ on a $2^n=2^m$, donc $n\ln(2)=m\ln(2)$. Or, $\ln(2)\neq 0$ donc $n=m$.
Réciproquement, si $n=m$, il est évident que pour tout réel $a$, $a^n=a^m$.
La proposition est donc vraie.
Puisque $(A\iff B)\iff((A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A))$, la négation de $(A\iff B)$ est $\neg(A\Rightarrow B)\vee\neg(B\Rightarrow A)$, c'est à dire $(A\wedge\neg B)\vee(B\wedge\neg A)$.
La négation de la proposition $(\forall a\in\mathbb{R}, a^n=a^m)\Longrightarrow(n=m)$ est donc

$$((\forall a\in\mathbb{R}, a^n=a^m)\wedge(n\neq m))\vee((n=m)\wedge(\exists a\in\mathbb{R}, a^n\neq a^m))$$

e) La négation de cette proposition est

$$((\forall x \in \mathbb{R}, (ax)^2 = (bx)^2) \wedge (a \neq b)) \vee ((a = b) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}, (ax)^2 \neq (bx)^2))$$

La proposition $(\forall x \in \mathbb{R}, (ax)^2 = (bx)^2) \wedge (a \neq b)$ est fausse puisque pour $a = -1$ et $b = 1$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, (ax)^2 = (bx)^2 = x^2$ mais $a \neq b$.

Ainsi, la proposition de départ est fausse.

**Correction de l'exercice 16 :** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On raisonne par disjonction de cas :

- Si $a \geq b$, alors $\max(a, b) = a$ et $\min(a, b) = b$. De plus, $a - b \geq 0$ donc $|a - b| = a - b$.
  Ainsi,
  $$\frac{a + b + |a - b|}{2} = \frac{a + b + a - b}{2} = a = \max(a, b)$$
  et
  $$\frac{a + b - |a - b|}{2} = \frac{a + b - (a - b)}{2} = b = \min(a, b)$$
- Si $a < b$, alors $\max(a, b) = b$ et $\min(a, b) = a$. De plus, $a - b < 0$ donc $|a - b| = -(a - b) = b - a$.
  Ainsi,
  $$\frac{a + b + |a - b|}{2} = \frac{a + b + b - a}{2} = b = \max(a, b)$$
  et
  $$\frac{a + b - |a - b|}{2} = \frac{a + b - (b - a)}{2} = a = \min(a, b)$$

Dans tous les cas, on a bien

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2} \quad \text{et} \quad \min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}$$

**Correction de l'exercice 17 :** On ne peut pas raisonner par équivalence à cause des racines carrées, on raisonne donc par analyse-synthèse.
**Analyse :** Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{x^3 + x^2 - x} = \sqrt{2x - 4x^2 - x^3}$.
Alors $x^3 + x^2 - x = 2x - 4x^2 - x^3$, donc $2x^3 + 5x^2 - 3x = 0$. On en déduit que $x(2x^2 + 5x - 3) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -3$ ($\frac{1}{2}$ est $-3$ sont les racines de $2x^2 + 5x - 3$).
**Synthèse :** Supposons que $x = 0$. Alors $\sqrt{x^3 + x^2 - x} = \sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{2x - 4x^2 - x^3} = \sqrt{0} = 0$ donc on a bien $\sqrt{x^3 + x^2 - x} = \sqrt{2x - 4x^2 - x^3}$.
Si $x = \dfrac{1}{2}$, alors $x^3 + x^2 - x = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{8} < 0$ donc $\sqrt{x^3 + x^2 - x}$ n'est pas défini, ainsi $\dfrac{1}{2}$ n'est pas solution.
Si $x = -3$, alors $x^3 + x^2 - x = -27 + 9 + 3 = -15 < 0$ donc $\sqrt{x^3 + x^2 - x}$ n'est pas défini et donc $-3$ n'est pas solution non plus.
**Conclusion :** $S = \{0\}$.

Pour la deuxième équation, on remarque que si $\sqrt{x - 2x^3} = \sqrt{5x^2 - 2x}$ alors $x - 2x^3 = 5x^2 - 2x$ donc $2x^3 + 5x^2 - 3x = 0$. La partie analyse est donc la même que pour la première équation, on trouve les 3 mêmes solutions potentielles.
**Synthèse :** Si $x = 0$, $\sqrt{x - 2x^3} = 0$ et $\sqrt{5x^2 - 2x} = 0$ donc 0 est solution.
Si $x = \dfrac{1}{2}$, alors $x - 2x^3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} > 0$ et $5x^2 - 2x = \dfrac{5}{4} - \dfrac{2}{2} = \dfrac{1}{4} > 0$, donc on a bien $\sqrt{x - 2x^3} = \sqrt{5x^2 - 2x} = \sqrt{1/4}$, ainsi $\dfrac{1}{2}$ est solution
Si $x = -3$, alors $x - 2x^3 = -3 - 2 \times (-27) = 51 > 0$ et $5x^2 - 2x = 5 \times 9 - 2 \times (-3) = 51 > 0$. Donc on a bien $\sqrt{x - 2x^3} = \sqrt{5x^2 - 2x} = \sqrt{51}$ donc $-3$ est solution.
**Conclusion :** $S = \{-3; 0, \dfrac{1}{2}\}$.

**Correction de l'exercice 18 :** Raisonnons par analyse synthèse.
**Analyse :** Supposons que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.
Alors, pour $x = y = 0$ on a $f(0)f(0) - f(0) = 0$, ainsi $f(0)(f(0) - 1) = 0$. On en déduit que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
Si $f(0) = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(0) - f(x \times 0) = x$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, x = 0$ ce qui est impossible.
On en déduit que $f(0) = 1$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(0) - f(x \times 0) = x$, c'est à dire $f(x) - 1 = x$ donc $f(x) = x + 1$.
**Synthèse :** Réciproquement, posons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x + 1$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x)f(y) - f(xy) = (x + 1)(y + 1) - (xy + 1) = xy + x + y + 1 - xy - 1 = x + y$, donc $f$ répond au problème posé.
**Conclusion :** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ si et seulement si $f$ est la fonction définie par $f(x) = x + 1$.